

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ СИГНАЛІВ

ЧАСТИНА ІІІ. СПЕКТРАЛЬНИЙ

АНАЛІЗ НЕПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний
посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Системи технічного захисту інформації»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Теорія сигналів. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи. Частина 3. Спектральний аналіз неперіодичних сигналів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів вищих навчальних закладів спеціальності 125 «Кибербезпека», освітня програма «Системи технічного захисту інформації» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: С. М. Куц, Д. О. Прогонов, Смирнов В.П.. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,25 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 31 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 01.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту
(протокол № 04/2019 від 26.03.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ СИГНАЛІВ

ЧАСТИНА ІІІ. СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НЕПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ. ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Куц Сергій Миколайович, канд. техн. наук, доц.
Прогонов Дмитро Олександрович, канд. техн. наук.
Смирнов Володимир Павлович, старший викладач.*

Відповідальний редактор: *Мачуський Євгеній Андрійович, доктор техн. наук, проф.*

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи. Частина 3 з дисципліни “Теорія сигналів” призначені для поглибленого вивчення розділу програми щодо моделювання складних сигналів з використанням сучасного програмного забезпечення (пакету Mathcad). Наданий матеріал дозволить набути навички аналізу складних сигналів сучасними методами досліджень та допоможе кращому засвоєнню теоретичних положень, викладених в лекціях, навчальній та науковій літературі.

ЗМІСТ

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ.....	4
1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	5
1.1. ПОДАННЯ НЕПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛУ ПЕРЕТВОРЕННЯМ ФУР'Є.....	5
1.2. ЗВ'ЯЗОК СПЕКТРІВ ПЕРІОДИЧНОГО ТА НЕПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛІВ.....	7
1.3. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є.....	9
2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ.....	13
3. ЗАДАЧІ.....	27
ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА.....	31

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

АЧС - амплітудно-частотний спектр

ФЧС - фазо-частотний спектр

$A(\omega)$ – пряме перетворення Фур'є парної складової сигналу

$B(\omega)$ – пряме перетворення Фур'є непарної складової сигналу

$W(\omega) = |S(j \cdot \omega)|^2$ - спектральна густина енергії або енергетичний спектр

$u_1(t) \otimes u_2(t)$ – згортка двох сигналів

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. ПОДАННЯ НЕПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛУ ПЕРЕТВОРЕННЯМ ФУР'Є

Застосуємо результати, отримані в попередньому розділі для періодичних сигналів, для випадку, коли сигнал є неперіодичним. Зробити це можна за допомогою граничного переходу. Запишемо періодичний сигнал за допомогою ряду Фур'є у комплексно-експоненційній формі:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \cdot \exp\{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\},$$

де

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \cdot \int_x^{x+T} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} dt; \quad (3.1)$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_x^{x+T} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} dt \right) \cdot \exp\{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\}.$$

Підставимо $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1}$:

$$u(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_x^{x+T} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} dt \right) \cdot \exp\{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} \cdot \omega_1. \quad (3.2)$$

Для того, щоб періодичний сигнал $u(t)$ перетворився на неперіодичний потрібно здійснити граничний перехід при $T \rightarrow \infty$.

З (3.1) виходить, що при $T \rightarrow \infty$ коефіцієнти ряду Фур'є $\dot{C}_n \rightarrow 0$, з властивості еквідистантності спектрів періодичних сигналів випливає, що відстань між спектральними складовими, яка дорівнює ω_1 , прямує до нуля, тобто спектр стає суцільним. Таким чином, при $T \rightarrow \infty$ частота $\omega_1 \rightarrow d\omega$, $n \cdot \omega_1 \rightarrow \omega$, а операція підсумовування в (3.2) трансформується у операцію інтегрування. У підсумку, формула (3.2) набуде вигляду:

$$u(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j \cdot \omega \cdot t\} \cdot \left(\int_x^{x+T} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt \right) d\omega. \quad (3.3)$$

Інтеграл, що стоїть в дужках, є функцією тільки частоти ω , тобто, його можна позначити:

$$S(j \cdot \omega) = \int_x^{x+T} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt. \quad (3.4)$$

Оскільки сигнал $u(t)$ за умовою відрізняється від нуля тільки в інтервалі $[x, x+T]$, інтеграл (3.4) не зміниться якщо межі інтегрування змінити на нескінченні. У підсумку одержимо:

$$S(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt. \quad (3.5)$$

Тепер формулу (3.3) можна записати так:

$$u(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j \cdot \omega) \cdot \exp\{j \cdot \omega \cdot t\} d\omega. \quad (3.6)$$

Формула (3.5) називається формулою *прямого перетворення Фур'є*, а формула (3.6) - формулою *оберненого перетворення Фур'є*. Функція $S(j \cdot \omega)$ має назву *спектральної густини* сигналу $u(t)$.

Основне обмеження для сигналу $u(t)$ – енергія цього сигналу має бути менше нескінченності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt < \infty.$$

У загальному випадку $S(j \cdot \omega)$ є комплексною функцією частоти, тобто:

$$S(j \cdot \omega) = |S(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot \theta(\omega)}.$$

Функція $S(j \cdot \omega)$ має властивості симетрії, аналогічні тим, що були отримані для коефіцієнтів комплексно-експоненційного ряду Фур'є, а саме:

$$|S(j \cdot \omega)| = |S(-j \cdot \omega)|;$$

$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega).$$

Отже, модуль спектральної густини сигналу $u(t)$ є парною функцією частоти, а аргумент – непарною функцією частоти. У загальному випадку дві суцільні функції частоти $|S(j \cdot \omega)|$ та $\theta(\omega)$ визначають суцільний спектр неперіодичного сигналу $u(t)$. Функція частоти $|S(j \cdot \omega)|$ називається

амплітудно-частотним спектром (АЧС) сигналу $u(t)$. Функція частоти $\theta(\omega)$ називається фазо-частотним спектром (ФЧС) сигналу $u(t)$.

Запишемо формулу прямого перетворення Фур'є та скористаємося в ній формулою Ейлера

$$S(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt + \\ j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} -u(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = A(\omega) + j \cdot B(\omega).$$

Тут $A(\omega)$ – пряме перетворення Фур'є парної складової сигналу, $B(\omega)$ – пряме перетворення Фур'є непарної складової сигналу.

Якщо сигнал $u(t)$ є дійсною і парною функцією часу, то його спектральна густина є дійсною функцією частоти, а тому фазовий спектр $\theta(\omega)$ може набувати тільки значення: 0 або $\pm\pi$.

Якщо сигнал $u(t)$ є дійсною і непарною функцією часу, то його спектральна густина є уявною функцією частоти, а тому фазовий спектр $\theta(\omega)$ може набувати два значення: $\pm \frac{\pi}{2}$.

Зазначимо ще одну властивість перетворення Фур'є. Підставимо у (3.5) $\omega = 0$. Одержимо $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt$. Отже, значення спектральної густини на нульовій частоті чисельно дорівнює площі функції $u(t)$.

1.2. ЗВ'ЯЗОК СПЕКТРІВ ПЕРІОДИЧНОГО ТА НЕПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛІВ

Нехай є неперіодичний сигнал $u_1(t)$ тривалістю τ . Повторимо цей імпульс з періодом $T > \tau$ так, щоб отримати періодичний сигнал $u_R(t)$. Цей періодичний сигнал можна подати рядом Фур'є з коефіцієнтами:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\tau} u_R(t) \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} dt; \quad (3.7)$$

За формулою прямого перетворення Фур'є (3.5) знайдемо значення спектральної густини неперіодичного сигналу на частоті $n \cdot \omega_1$:

$$S(j \cdot n \cdot \omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} dt = \int_0^{\tau} u_1(t) \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t\} dt. \quad (3.8)$$

Заміна меж інтегрування пояснюється просто: неперіодичний сигнал $u_1(t)$ відрізняється від нуля тільки на інтервалі тривалості імпульсу τ і на цьому інтервалі співпадає з одним із імпульсів періодичного сигналу $u_R(t)$.

Порівнюючи формули (3.7) та (3.8), одержимо:

$$\dot{C}_n = \frac{S(j \cdot n \cdot \omega_1)}{T}. \quad (3.9)$$

З формули (3.9) виходить, що коли розмірність сигналу, наприклад $[V]$, то розмірність спектральної густини буде $[V \cdot c]$ або $[\frac{B}{Гц}]$. Крім того, з аналізу формули (3.9) можна зробити такі висновки:

- Модуль спектральної густини неперіодичного сигналу та обвідна лінійчастого спектра періодичної послідовності, отриманої повторенням цього сигналу, співпадають за формою і відрізняються тільки масштабним множником.
- Переходячи від періодичного сигналу до неперіодичного при $T \rightarrow \infty$, одержимо $\dot{C}_n \rightarrow 0$ і $\omega_1 \rightarrow 0$, але так, що $\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\dot{C}_n}{\omega_1} = S(j \cdot \omega)$.

Важливою характеристикою сигналу є його спектральна густина енергії. Формула, за допомогою якої можна знайти енергію сигналу $u(t)$, поданого у часовій області:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt.$$

Формула, яка дозволяє отримати енергію сигналу, поданого у спектральній області:

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j \cdot \omega)|^2 d\omega.$$

Спектральну густину енергії або енергетичний спектр сигналу будемо позначати $W(\omega) = |S(j\cdot\omega)|^2$. Інтегруючи функцію $W(\omega)$ від $-\infty$ до ∞ , одержуємо повну енергію сигналу, що виділяється на опорі 1 Ом. При інтегруванні на скінченному інтервалі частот маємо енергію сигналу, яка зосереджена в цьому діапазоні.

Енергія двох сигналів знаходиться за наступною формулою:

$$E_{12} = \frac{1}{2\cdot\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\cdot\omega) \cdot (S_2(j\cdot\omega))^* d\omega,$$

де $(S_2(j\cdot\omega))^*$ – сигнал, комплексно-спряжений до сигналу $S_2(j\cdot\omega)$.

1.3. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є

1. Теорема лінійності (суперпозиції).

Нехай $u_1(t) \leftrightarrow S_1(j\cdot\omega)$, а $u_2(t) \leftrightarrow S_2(j\cdot\omega)$. Тоді, для будь-яких a і b справедливе твердження:

$$a\cdot u_1(t) + b\cdot u_2(t) \leftrightarrow a\cdot S_1(j\cdot\omega) + b\cdot S_2(j\cdot\omega).$$

2. Теорема зміни масштабу часу.

Якщо $u(t) \leftrightarrow S(j\cdot\omega)$, тоді $u(a\cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} S(\frac{j\cdot\omega}{|a|})$, де a – масштабний множник, який може мати як додатні, так і від'ємні значення.

3. Теорема зсуву сигналу за часом (запізнювання сигналу).

Якщо $u(t) \leftrightarrow S(j\cdot\omega)$, тоді для будь-якого сталого запізнювання t_0 справедливе твердження:

$$u(t\mp t_0) \leftrightarrow S(j\cdot\omega) \cdot \exp(\mp j\cdot\omega\cdot t_0).$$

4. Теорема диференціювання у часовій області.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j\cdot\omega)$ і перша похідна сигналу $u(t)$ задовольняє умовам, за яких можна робити перетворення Фур'є, тоді:

$$\frac{d(u(t))}{dt} \leftrightarrow j \cdot \omega \cdot S(j \cdot \omega).$$

Цю теорему можна узагальнити на випадок n -кратного диференціювання: d^n / t^n

$$\frac{d^n(u(t))}{dt^n} \leftrightarrow (j \cdot \omega)^n \cdot S(j \cdot \omega).$$

5. Теорема інтегрування у часовій області.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j \cdot \omega)$, тоді:

$$\int u(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot S(j \cdot \omega).$$

6. Теорема диференціювання у частотній області.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j \cdot \omega)$, тоді:

$$-j \cdot t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{d(S(j \cdot \omega))}{d\omega}.$$

7. Теорема інверсії часу.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j \cdot \omega)$, тоді:

$$u(-t) \leftrightarrow S^*(j \cdot \omega).$$

8. Теорема дуальності.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j \cdot \omega)$, тоді:

$$S(t) \leftrightarrow u(j \cdot \omega) \text{ з коефіцієнтом зв'язку } \frac{1}{2 \cdot \pi}.$$

9. Теорема зсуву спектра за частотою.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j \cdot \omega)$, тоді для довільного, але сталого значення ω_0 :

$$u(t) \cdot \exp(\pm j \cdot \omega_0 \cdot t) \leftrightarrow S[j \cdot (\omega \mp \omega_0)].$$

10. Теорема модуляції.

Нехай $u(t) \leftrightarrow S(j \cdot \omega)$, тоді:

$$u(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{2} S[j \cdot (\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j \cdot (\omega + \omega_0)].$$

11. Теорема згортки.

Нехай $u_1(t) \leftrightarrow S_1(j \cdot \omega)$ і $u_2(t) \leftrightarrow S_2(j \cdot \omega)$, тоді:

$$u_1(t) \otimes u_2(t) \leftrightarrow S_1(j \cdot \omega) \cdot S_2(j \cdot \omega).$$

Тут знак \otimes означає згортку сигналів, тобто:

$$u_1(t) \otimes u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \cdot u_2(t-\tau) d\tau.$$

Те ж саме відбувається і при перемноженні двох сигналів:

$$u_1(t) \cdot u_2(t) \leftrightarrow S_1(j \cdot \omega) \otimes S_2(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j \cdot \nu) \cdot S_2[j \cdot (\omega - \nu)] d\nu$$

Розглянемо спектри сигналів, що не задовольняють умовам застосування перетворення Фур'є (сигнали, у яких енергія дорівнює нескінченності).

Нехай, $u(t) = \delta(t)$. Спектральну густину дельта-функції знайти просто, якщо згадати її фільтрувальну властивість:

$$S(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = e^0 = 1.$$

Звідси, за формулою (3.6):

$$\delta(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j \cdot \omega \cdot t\} d\omega.$$

Виходячи з дуальності перетворень Фур'є, отримаємо наступне:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt. \quad (3.10)$$

Отже, спектр дельта-функції є рівномірним та на всіх частотах дорівнює 1.

Тепер знайдемо спектри гармонічних коливань $\cos(\omega_0 \cdot t)$ та $\sin(\omega_0 \cdot t)$.

$$\cos(\omega_0 \cdot t) = \frac{\exp(j \cdot \omega_0 \cdot t) + \exp(-j \cdot \omega_0 \cdot t)}{2}.$$

Для функції $\cos(\omega_0 \cdot t)$ спектральна густина буде знаходитися за наступною формулою:

$$\begin{aligned} S(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp\{-j \cdot (\omega - \omega_0) \cdot t\} + \exp\{-j \cdot (\omega + \omega_0) \cdot t\}] dt \end{aligned}$$

Із формули (3.10) виходить, що спектральна густина функції $\cos(\omega_0 \cdot t)$ дорівнює

$$S(j \cdot \omega) = \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

За умови сталої напруги або струму ($\omega_0 = 0$), отримуємо наступне:

$$S(j \cdot \omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega).$$

Для функції $\sin(\omega_0 \cdot t)$ спектральна густина буде знаходитися за наступною формулою:

$$\begin{aligned} S(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp\{-j \cdot (\omega - \omega_0) \cdot t\} - \exp\{-j \cdot (\omega + \omega_0) \cdot t\}] dt \end{aligned}$$

Із формули (3.10) виходить, що спектральна густина функції $\sin(\omega_0 \cdot t)$ дорівнює:

$$S(j \cdot \omega) = -j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Тепер знайдемо спектральну густину для сигналу $u(t) = 1(t)$.

Для цього спочатку знайдемо спектральну густину сигналу $e^{-\alpha \cdot t}$

$$\begin{aligned} S(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(\alpha + j \cdot \omega) \cdot t\} dt = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j \cdot \omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

При $\alpha \rightarrow 0$, функція $e^{-\alpha \cdot t} \rightarrow 1(t)$. Отже, спектральна густина сигналу $1(t)$ дорівнює:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j \cdot \omega}{\alpha^2 + \omega^2} &= \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} &= \pi \cdot \delta(\omega). \end{aligned}$$

Отже, для всієї функції отримуємо наступне:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j \cdot \omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j \cdot \omega}.$$

Отже, спектральна густина сигналу $1(t)$ дорівнює:

$$S(j \cdot \omega) = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j \cdot \omega}.$$

При постійному струмі спектральну густину сигналу $1(t)$ потрібно скласти з комплексно-спряженою величиною. У підсумку отримаємо наступне:

$$S_1(j\omega) = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega).$$

Таке ж значення для спектральної густини для постійного струму було отримано і при розгляданні функції $\cos(\omega_0 \cdot t)$.

Для будь-яких сигналів смуга, в якій зосереджено 90% енергії називається технічною, ефективною або просто шириною смуги даного сигналу, а в якій зосереджено 95% енергії – активною шириною смуги сигналу.

За фронт періодичних та неперіодичних сигналів відповідають верхні частоти, тобто, якщо пропустити будь-який сигнал через фільтр нижніх частот, то його фронт стане більш пологим.

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти спектральну густину сигналу $u(t) = E_m \cdot \text{rect}(\frac{t}{\tau})$ при $E_m = 2$ В та $\tau = 4$ мкс (Рис. 3.1) та побудувати АЧС, ФЧС, енергетичний спектр, дійсну та уявну частину спектральної густини для цього сигналу.

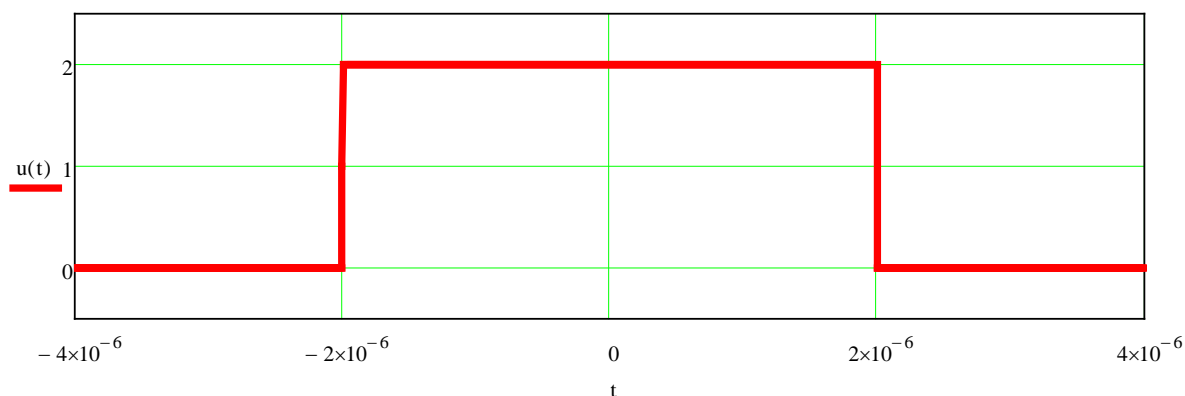


Рис. 3.1 Сигнал $u(t) = E_m \cdot \text{rect}(\frac{t}{\tau})$

Розв'язок

По-перше, зробимо заміну координат $x = t \cdot 10^6$, що дозволяє позбавитися множника 10^{-6} при розрахунках. Отже, застосовуючи формулу (3.5), знайдемо спектральну густину прямокутного імпульсу:

$$\begin{aligned} S(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = E_m \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = \\ &= E_m \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = \frac{E_m}{-j \cdot \omega} \cdot (\exp(-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}) - \exp(j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2})) = \frac{E_m}{j \cdot \omega} \cdot (\exp(j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}) - \\ &- \exp(-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2})) = \frac{E_m}{j \cdot \omega} \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) = \frac{E_m}{\omega} \cdot 2 \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) = \frac{E_m \cdot \tau}{\omega \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2}). \end{aligned}$$

Функція $\frac{\sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2})}{\omega \cdot \frac{\tau}{2}} = \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}).$

Отже, спектральна густина дорівнює:

$$S(j \cdot \omega) = E_m \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) = 8 \cdot \text{sinc}(2 \cdot \omega).$$

Спектральна густина прямокутного імпульсу є дійсною. Цей висновок можна було зробити раніше, тому що цей сигнал є парною функцією часу, тому $B(\omega) = 0$.

Тепер покажемо, як ту ж саму операцію зробити за допомогою програми MathCAD.

$$S(\omega) := \int_{-2}^2 u(x) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot x} dx \rightarrow \frac{4 \cdot \sin(2 \cdot \omega)}{\omega}$$

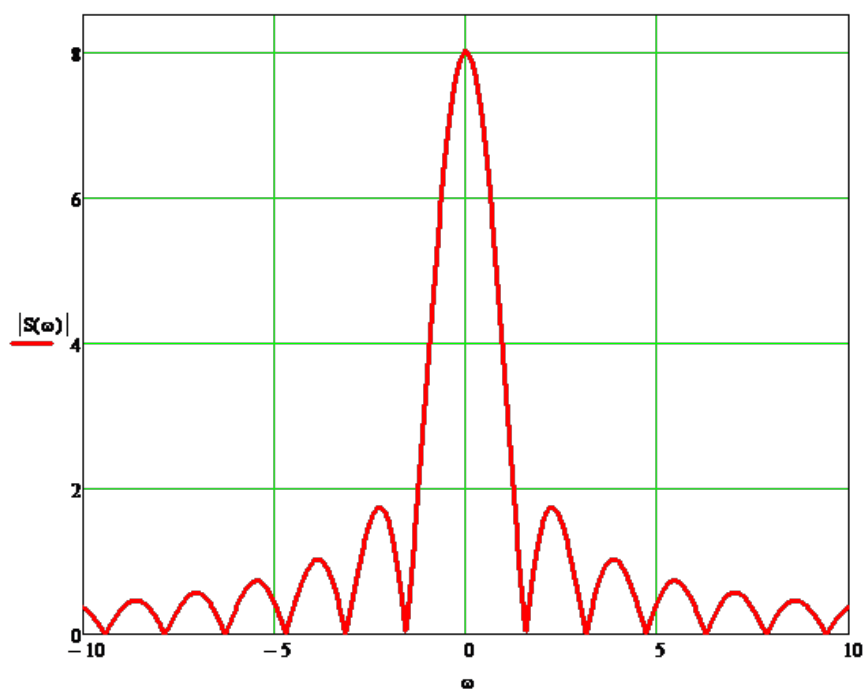
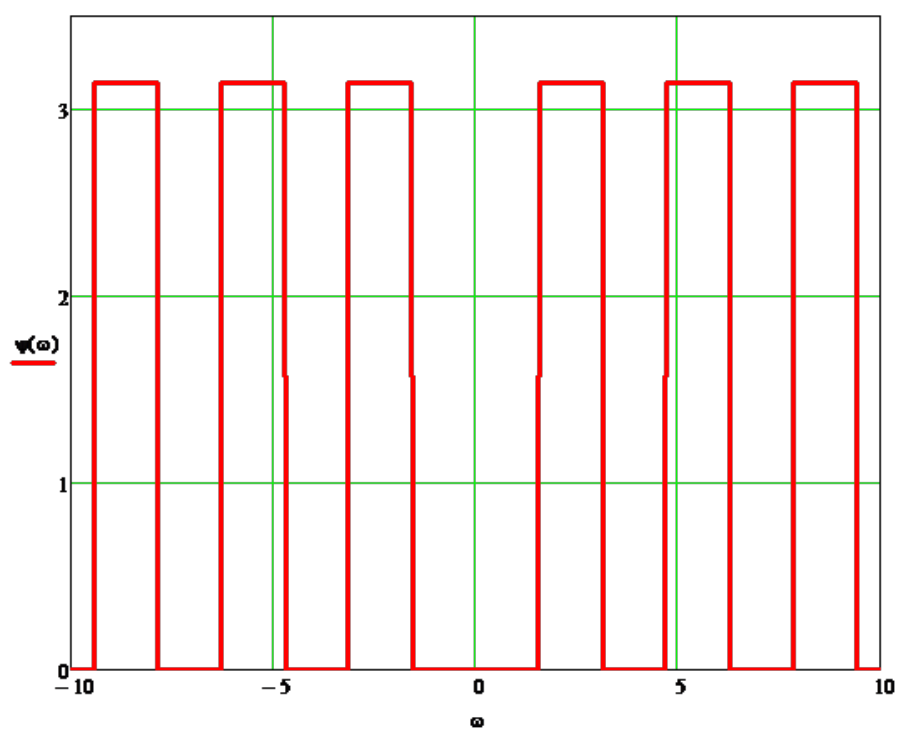
Тепер побудуємо АЧС (Рис. 3.2), ФЧС (Рис. 3.3), енергетичний спектр (Рис. 3.4), дійсну (Рис. 3.5) та уявну (Рис. 3.6) частину спектральної густини для цього сигналу.

$$\psi(\omega) := \arg(S(\omega))$$

$$W(\omega) := (|S(\omega)|)^2$$

$$A(\omega) := \text{Re}(S(\omega))$$

$$B(\omega) := \text{Im}(S(\omega))$$

Рис. 3.2 АЧС сигналу $u(x)$ Рис. 3.3 ФЧС сигналу $u(x)$

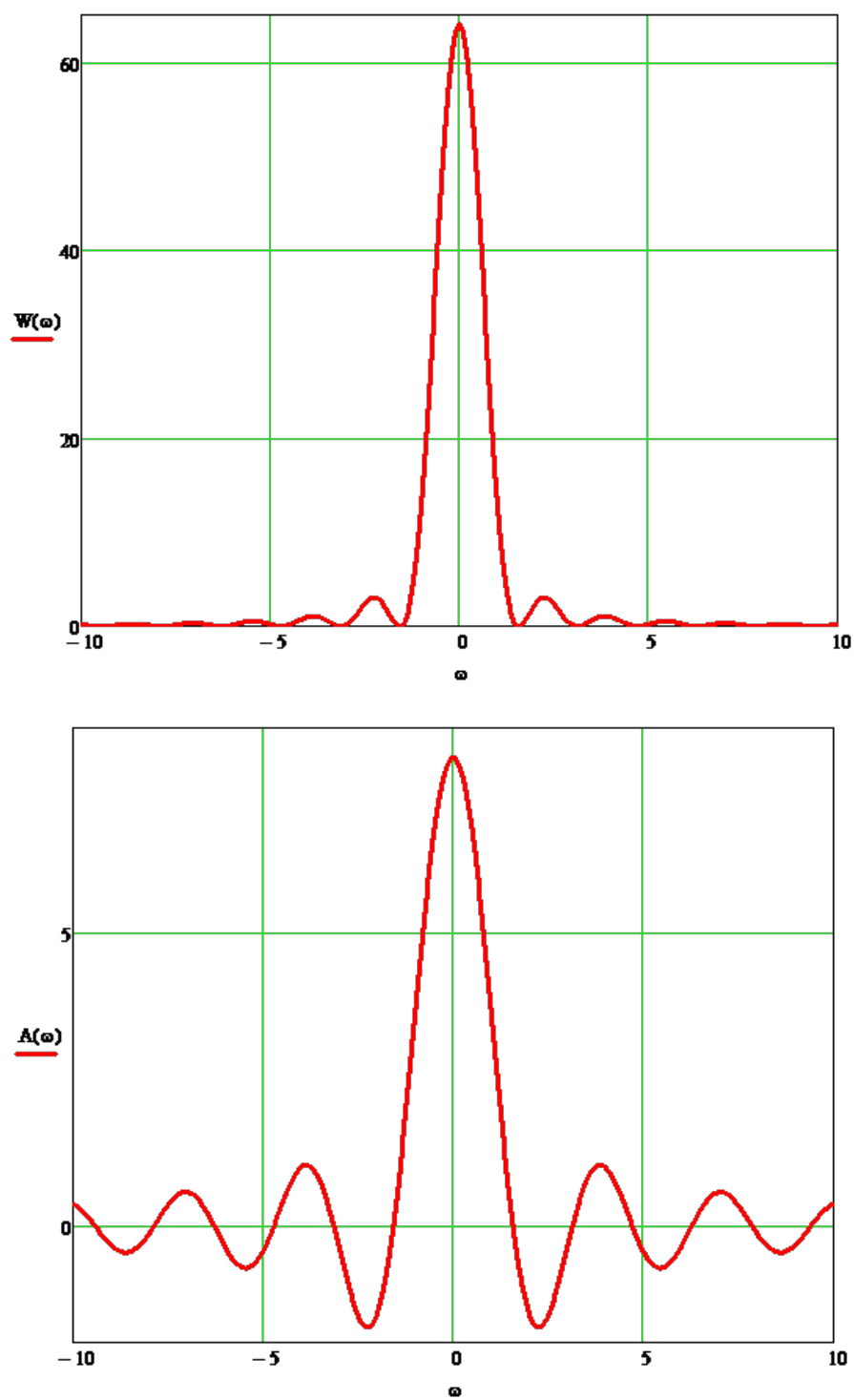


Рис. 3.5 Дійсна частина спектральної густини сигналу $u(x)$

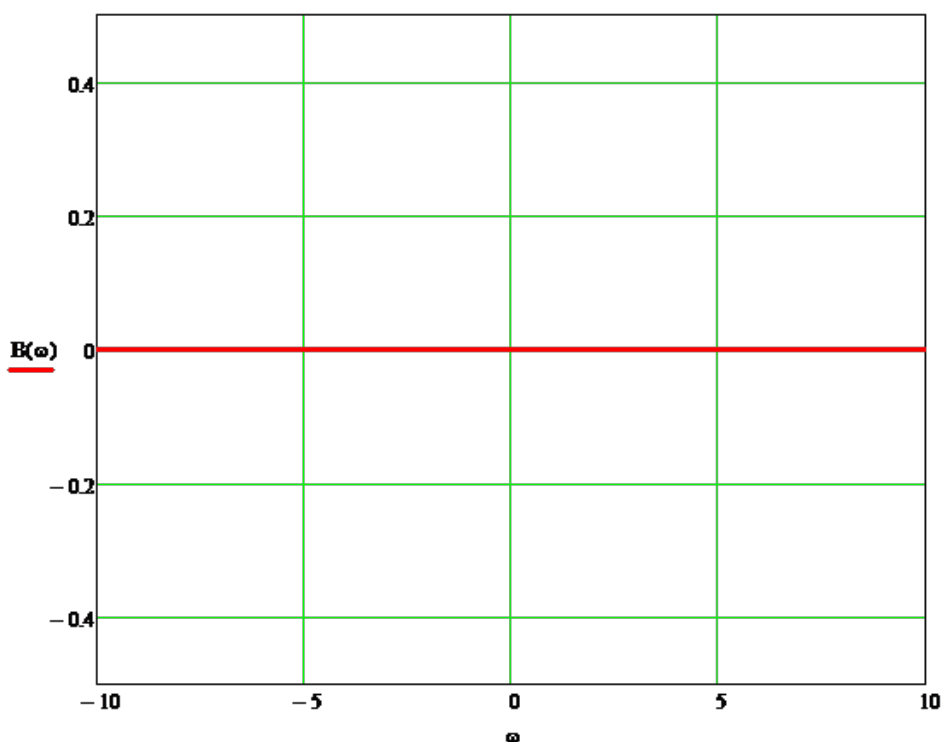


Рис. 3.6 Уявна частина спектральної густини сигналу $u(x)$

Як ми бачимо, графік дійсної частини сигналу $u(t)$ – це функція $\text{sinc}(x)$, а АЧС – це її модуль. Уявна частина, як і було раніше сказано, дорівнює нулю. Тепер більш детально розглянемо АЧС. На нульовій частоті модуль спектральної густини дорівнює площі сигналу $u(t)$. Для прямокутного імпульсу нулі знаходяться на частотах, які кратні $\frac{2 \cdot \pi}{\tau}$. 90% енергії прямокутного імпульсу знаходиться на смузі частот від нульової частоти до частоти першого нуля, 95% енергії – до другого нуля та 97% енергії – до третього нуля.

Для повернення до дійсних значень частоти потрібно частоту помножити на 10^6 .

Самостійно пояснити вигляд ФЧС.

2. Знайти спектральну густину сигналу $u(t)$, графік якого зображено на Рис. 3.7 та побудувати АЧС, ФЧС, енергетичний спектр, дійсну та уявну частину спектральної густини для цього сигналу.

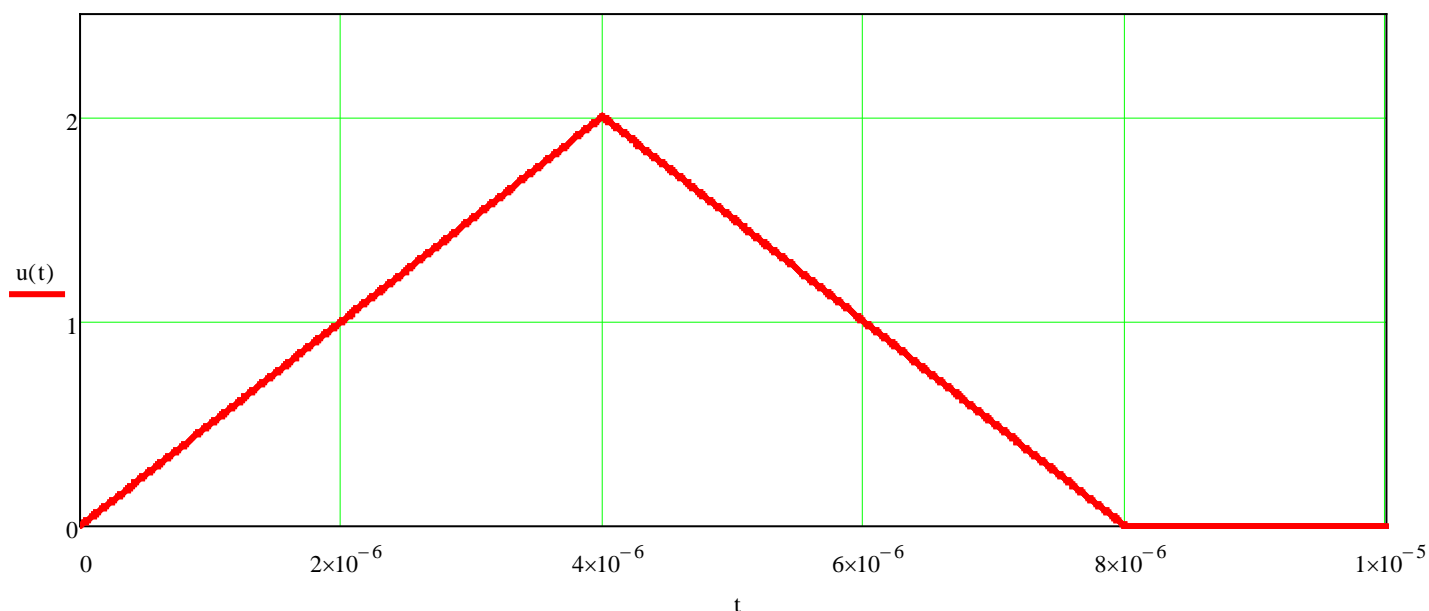


Рис. 3.7 Сигнал $u(t)$

Розв'язок

Спочатку знайдемо спектральну густину цього сигналу, використовуючи теореми про спектри.

По-перше, зсунемо сигнал $u(t)$, так, щоб він був симетричним відносно осі ординат. Таким чином отримаємо сигнал $u_1(t)$ (Рис. 3.8)

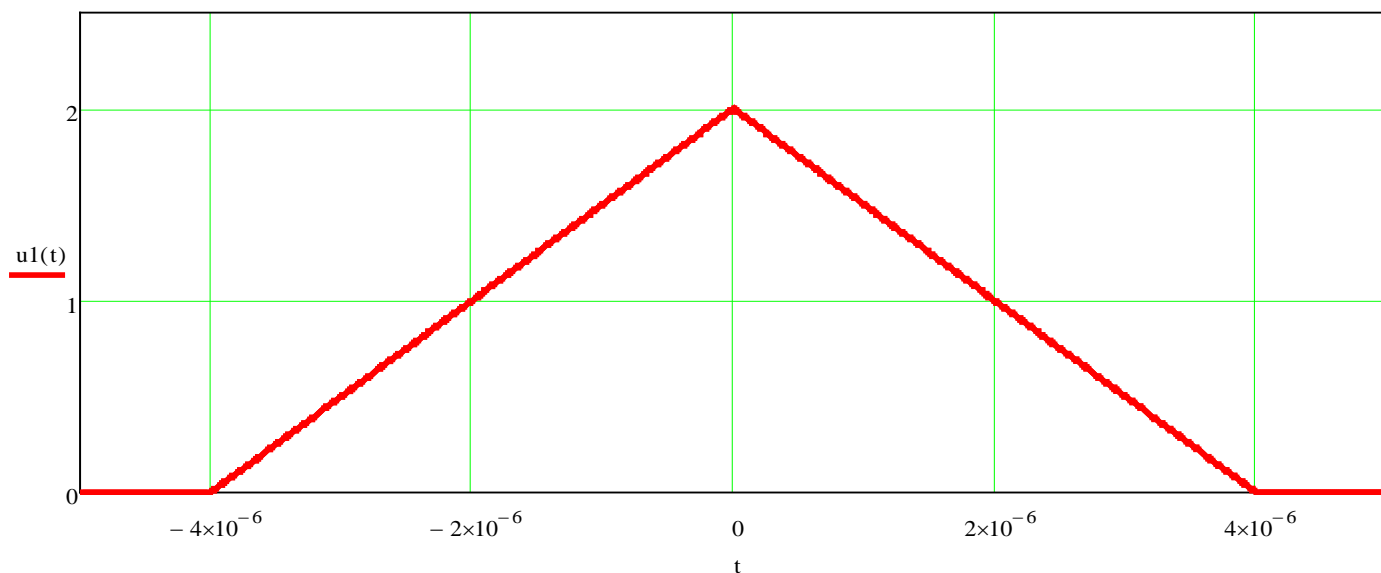


Рис. 3.8 Сигнал $u_1(t)$

Так як похідна від лінійно зростаючої функції дорівнює константі, то похідна від сигналу $u_1(t)$ має наступний вигляд (сигнал $u_2(t)$ на Рис. 3.9):

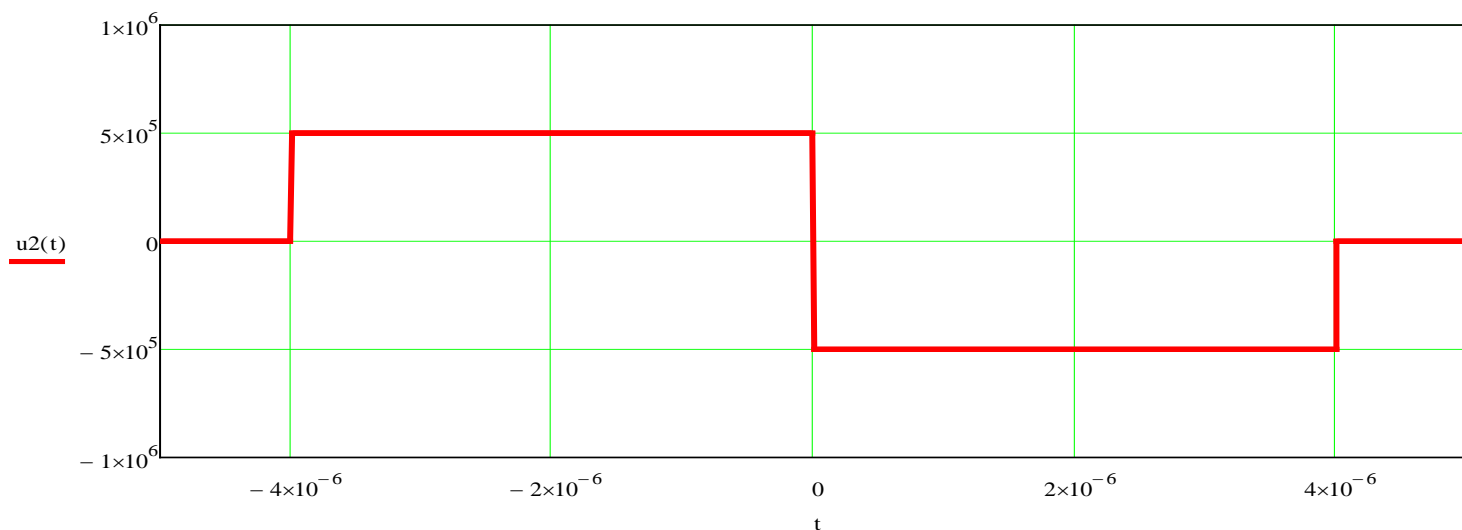


Рис. 3.9 Сигнал $u_2(t)$

Це два прямокутних імпульси, амплітуди яких дорівнюють відношенню амплітуди сигналу $u_1(t)$ до тривалості сигналу. Тепер всі ці

спектральні густини виразимо через спектральну густину прямокутного імпульсу $S_{\text{прям}}(j \cdot \omega)$, яка була отримана у задачі № 1.

Спектральна густина прямокутного імпульсу $S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) = E_m \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2})$.

У даному випадку $E_m = \frac{E}{\tau}$, отже:

$$S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) = \frac{E}{\tau} \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) = E \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}).$$

Для сигналу $u_2(t)$ спектральна густина дорівнює:

$$S_2(j \cdot \omega) = S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) \cdot (\exp(j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}) - \exp(-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2})) = 2 \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) \cdot S_{\text{прям}}(j \cdot \omega).$$

Для сигналу $u_1(t)$ спектральна густина дорівнює:

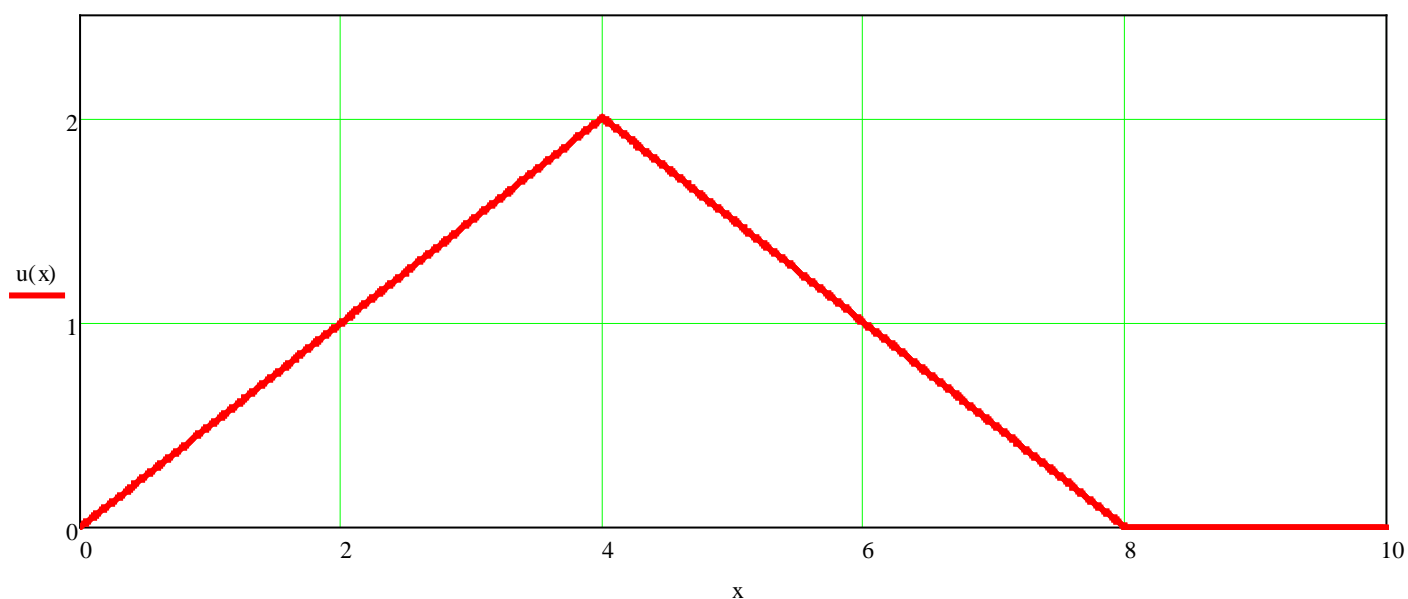
$$\begin{aligned} S_1(j \cdot \omega) &= \frac{S_2(j \cdot \omega)}{j \cdot \omega} = \frac{2 \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2})}{j \cdot \omega} \cdot S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) = \frac{2 \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2})}{\omega} \cdot S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) = \\ &= \frac{\tau \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2})}{\frac{\omega \cdot \tau}{2}} \cdot S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) = \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) \cdot S_{\text{прям}}(j \cdot \omega) = E \cdot \tau \cdot \text{sinc}^2(\omega \cdot \frac{\tau}{2}). \end{aligned}$$

Тепер, запишемо вираз для спектральної густини сигналу $u(t)$:

$$S(j \cdot \omega) = S_1(j \cdot \omega) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) = E \cdot \tau \cdot \text{sinc}^2(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau).$$

Тепер знайдемо спектральну густину цього сигналу за допомогою програми Mathcad, але зробимо заміну t на x , як і у задачі № 1 та покажемо графік сигналу $u(x)$ на Рис. 3.10:

$$u(x) := \begin{cases} \frac{2}{\tau}x & \text{if } 0 < x < \tau \\ \left[\frac{-2}{\tau}(x - 2\tau) \right] & \text{if } \tau \leq x \leq 2\tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 3.10 Сигнал $u(x)$

Спектральна густина для цього сигналу знаходиться за наступною формулою:

$$S1(\omega) := \int_0^{2\tau} u(x) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot x} dx$$

Знайдемо вирази для ФЧС, енергетичного спектра, дійсної та уявної частин цього сигналу.

$$\psi1(\omega) := \arg(S1(\omega))$$

$$W1(\omega) := (|S1(\omega)|)^2$$

$$A1(\omega) := \operatorname{Re}(S1(\omega))$$

$$B1(\omega) := \operatorname{Im}(S1(\omega))$$

Тепер знайдемо вирази для ФЧС, енергетичного спектра, дійсної та уявної частин цього сигналу, використовуючи вираз для спектральної густини сигналу, який було отримано вище.

$$S2(\omega) := 2 \cdot \tau \cdot \left(\operatorname{sinc} \left(\omega \cdot \frac{\tau}{2} \right) \right)^2 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau}$$

$$\psi2(\omega) := \arg(S2(\omega))$$

$$W2(\omega) := (|S2(\omega)|)^2$$

$$A2(\omega) := \operatorname{Re}(S2(\omega))$$

$$B2(\omega) := \operatorname{Im}(S2(\omega))$$

Тепер побудуємо АЧС (Рис. 3.11), ФЧС (Рис. 3.12), енергетичний спектр (Рис. 3.13), дійсну (Рис. 3.14) та уявну (Рис. 3.15) частини сигналу, отримані двома способами на одному графіку, щоб показати, що вони співпадають.

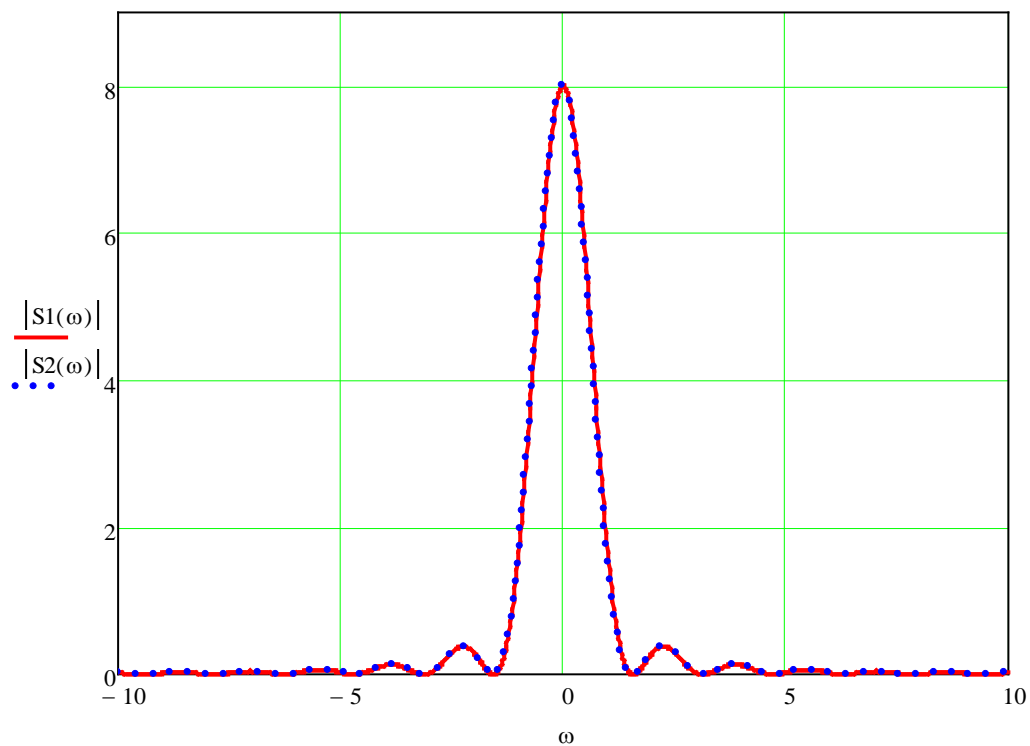
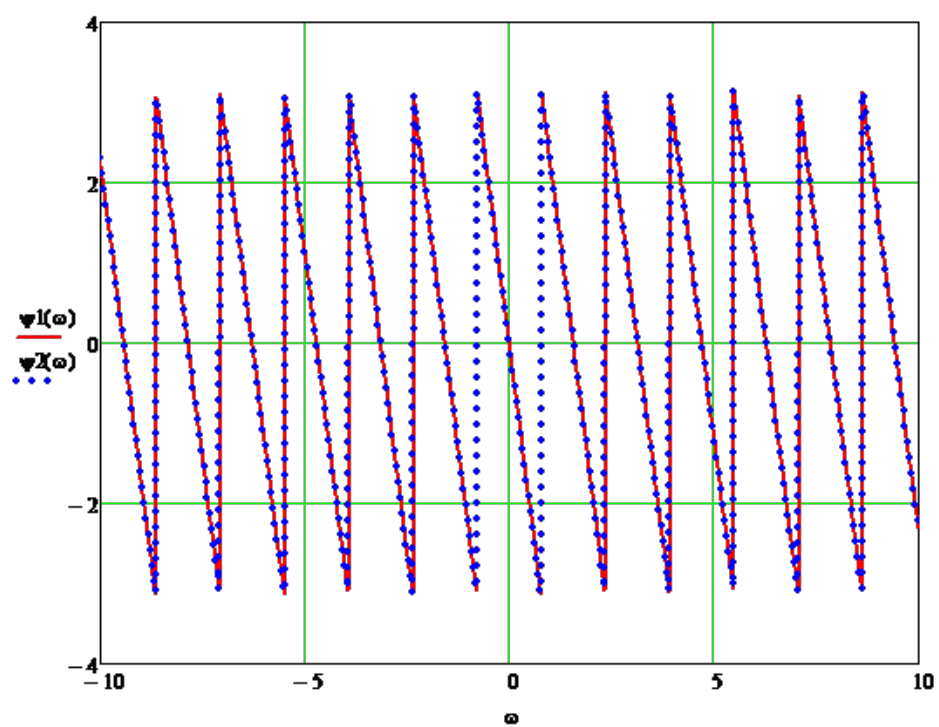
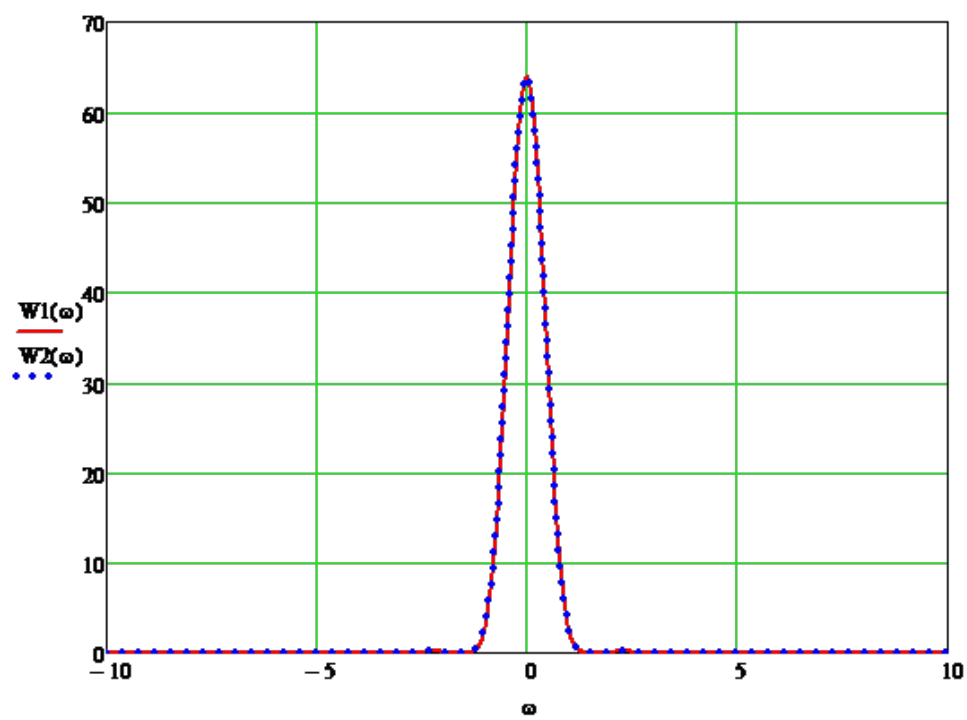
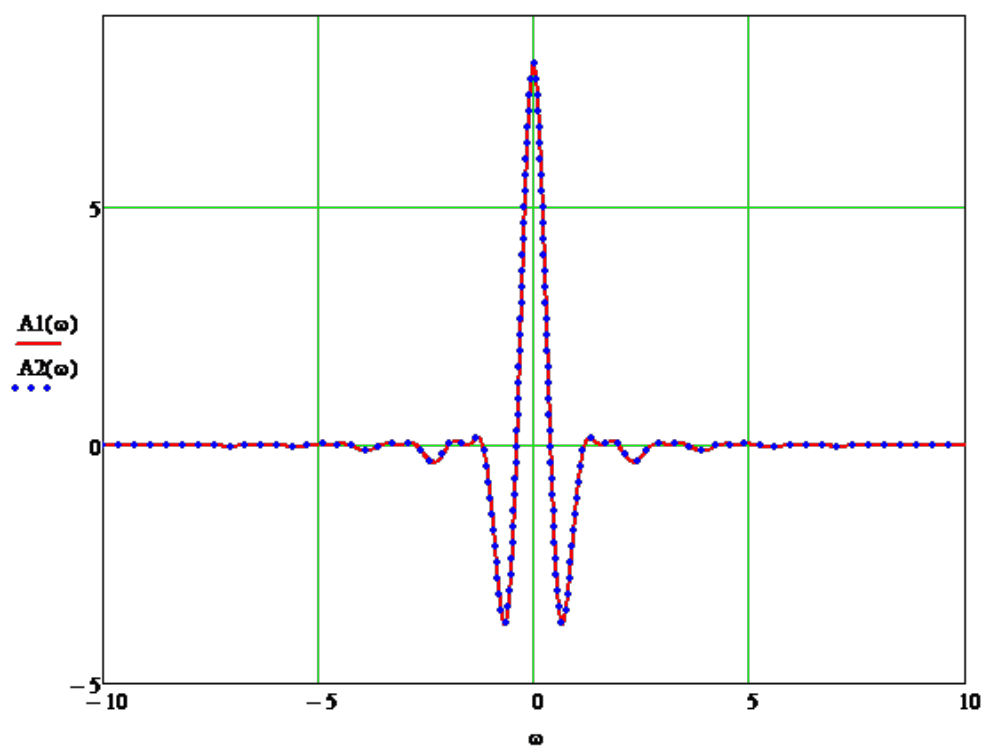
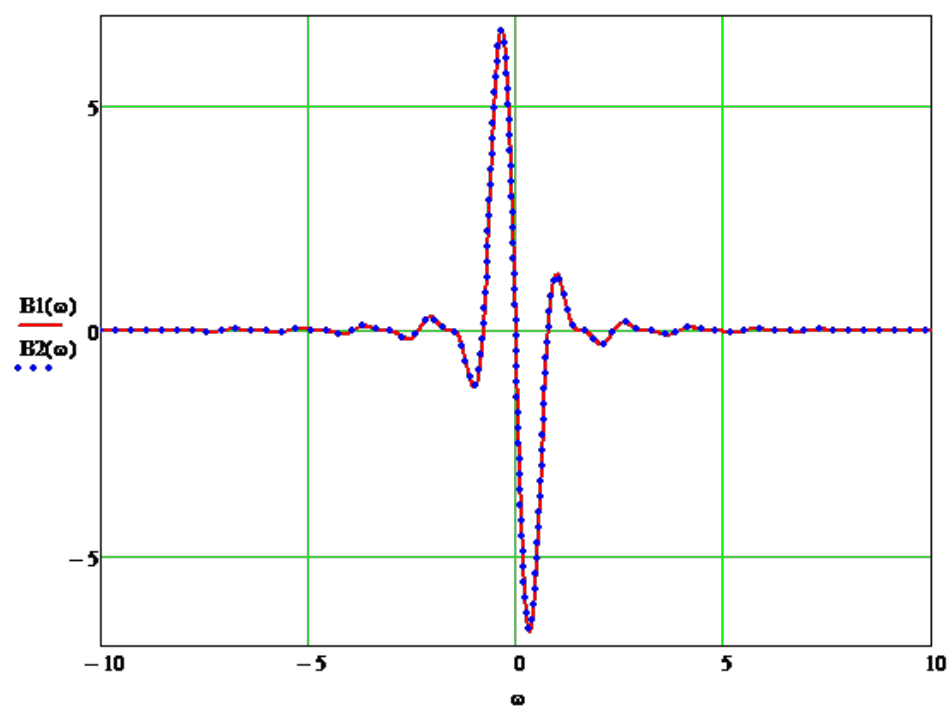


Рис. 3.11 АЧС сигналу $u(x)$

Рис. 3.12 ФЧС сигналу $u(x)$ Рис. 3.13 Енергетичний спектр сигналу $u(x)$

Рис. 3.14 Дійсна частина сигналу $u(x)$ Рис. 3.15 Уявна частина сигналу $u(x)$

Як ми бачимо графіки, які були отримані різними способами співпадають, що підтверджує наші розрахунки. На графіку ФЧС ми можемо побачити розбіжність, яка зумовлена похибкою програми Mathcad. Проаналізувавши АЧС та енергетичний спектр ми бачимо, що на нульовій частоті АЧС дорівнює площі під сигналом та те, що, порівняно із прямокутним імпульсом, складові спектра з вищими частотами є меншими за рівнем. Це обумовлює більш пологий фронт імпульсу.

3. Модуль спектральної густини прямокутного імпульсу на нульовій частоті дорівнює 10^{-6} В·с, активна ширина його спектру дорівнює 200 МГц. Знайти амплітуду цього імпульсу.

Розв'язок

Ми знаємо, що активна ширина спектра визначається другим нулем спектральної густини прямокутного імпульсу. Цей нуль знаходиться на частоті $\omega = 2 \cdot \frac{2\pi}{\tau}$, тобто $f = \frac{2}{\tau} = 200 \cdot 10^6$ Гц, тобто $\tau = 10^{-8}$ с.

Спектральна густина на нульовій частоті дорівнює $S(0) = E \cdot \tau = 10^{-6}$ В·с. Отже, $E = 100$ В.

4. Спектральна густина неперіодичного сигналу дорівнює $S(n \cdot \omega_k) = 3 + 4 \cdot j$ В·мкс, його тривалість дорівнює 1 мкс. Знайти A_3 для такого ж періодичного сигналу зі шпаруватістю $q = 5$.

Розв'язок

Знайдемо значення модуля спектральної густини:

$$|S(n \cdot \omega_n)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ В} \cdot \text{мкс}.$$

Тепер знайдемо період цього сигналу з виразу:

$$q = \frac{T}{\tau}. \text{ Відповідно, } T = q \cdot \tau = 5 \text{ мкс}.$$

$$\text{Відповідно, модуль коефіцієнта } C_3 \text{ дорівнює: } |C_3| = \frac{|S(n \cdot \omega_n)|}{T} = 1 \text{ В}.$$

Коефіцієнт $A_3 = 2 \cdot |C_3| = 2 \text{ В}$.

5. Сигнал $u(t)$ є прямокутним імпульсом із завдання № 1. Знайти спектральну густину його похідної двома способами: перший – використовуючи теореми про спектри, а другий – через перетворення Фур'є, взявши інтеграл.

Розв'язок

Похідна від прямокутного імпульсу має вигляд:

$$u_1(t) = u'(t) = E \cdot (\delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})).$$

Знайдемо спектральну густину сигналу $u(t)$ першим способом (за теоремою про диференціювання у часовій області):

$S_1(j \cdot \omega) = j \cdot \omega \cdot S_{\text{прям}}(j \cdot \omega)$, де $S_{\text{прям}}(j \cdot \omega)$ – спектральна густина прямокутного імпульсу. Отже,

$$S_1(j \cdot \omega) = j \cdot \omega \cdot E \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}).$$

Тепер знайдемо спектральну густину сигналу $u_1(t)$ другим способом:

$$\begin{aligned} S_1(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E \cdot (\delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} dt \\ &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E \cdot (\delta(t + \frac{\tau}{2}) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} - \delta(t - \frac{\tau}{2}) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\}) dt. \end{aligned}$$

Використовуючи фільтрувальну властивість дельта-функції отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} S_1(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E \cdot (\delta(t + \frac{\tau}{2}) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\} - \delta(t - \frac{\tau}{2}) \cdot \exp\{-j \cdot \omega \cdot t\}) dt = \\ &= E \cdot (\exp(j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}) - \exp(-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2})) = 2 \cdot j \cdot E \cdot \sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2}) = j \cdot \omega \cdot E \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\omega \cdot \frac{\tau}{2})}{\omega \cdot \frac{\tau}{2}} \\ &= j \cdot \omega \cdot E \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2}). \end{aligned}$$

Отже, значення спектральних густин, які були знайдені різними способами співпадають.

3. ЗАДАЧІ

1. Для сигналів, зображених на Рис. 3.16 – 3.18 якісно побудувати модулі її спектральних густин на одному графіку.

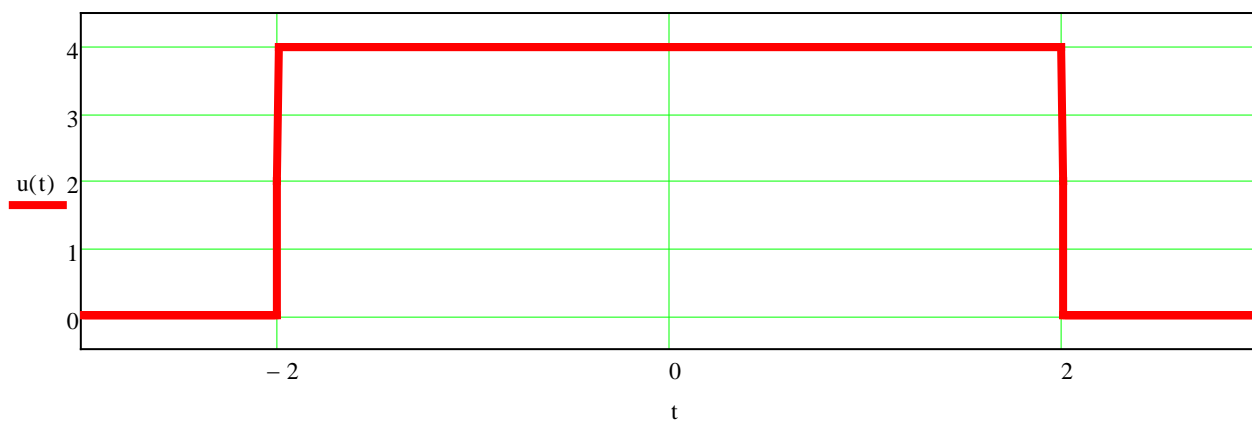


Рис. 3.16 Перший сигнал

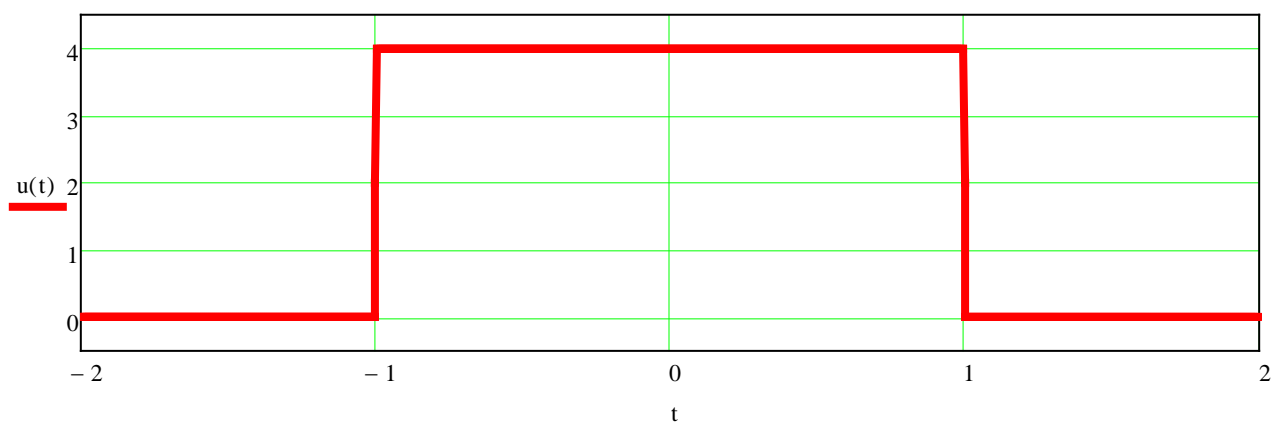


Рис. 3.17 Другий сигнал

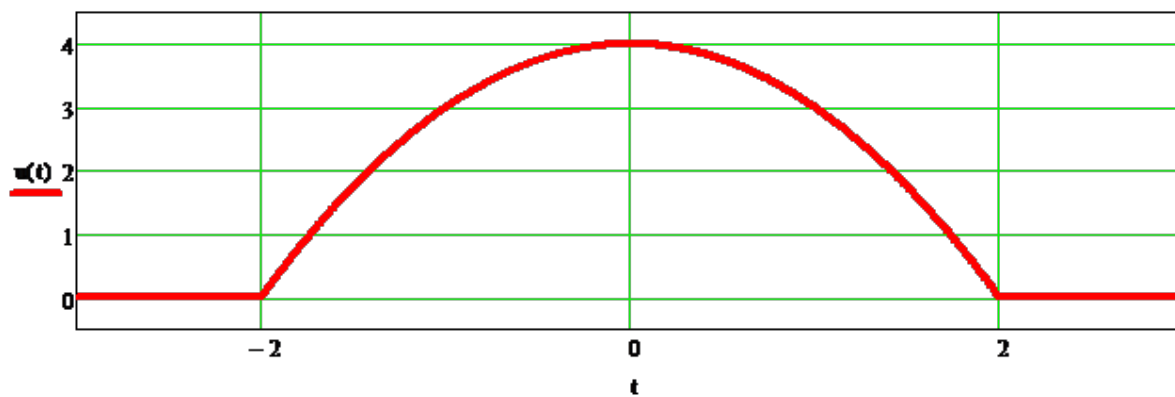


Рис. 3.18 Третій сигнал

2. Як буде виглядати сигнал, спектральна густина якого дорівнює

$$S(j\omega) = \frac{E \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \frac{\tau}{2})}{j\omega}?$$

3. Знайти спектральні густини сигналів $u_1(t)$ – $u_3(t)$, зображених на Рис. 3.19 – 3.21.

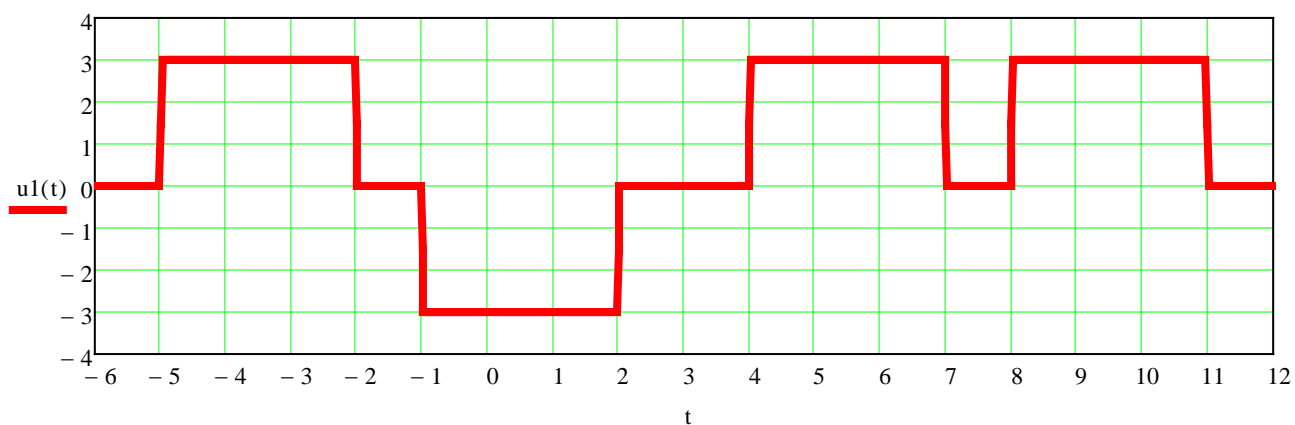


Рис. 3.19 Сигнал $u_1(t)$

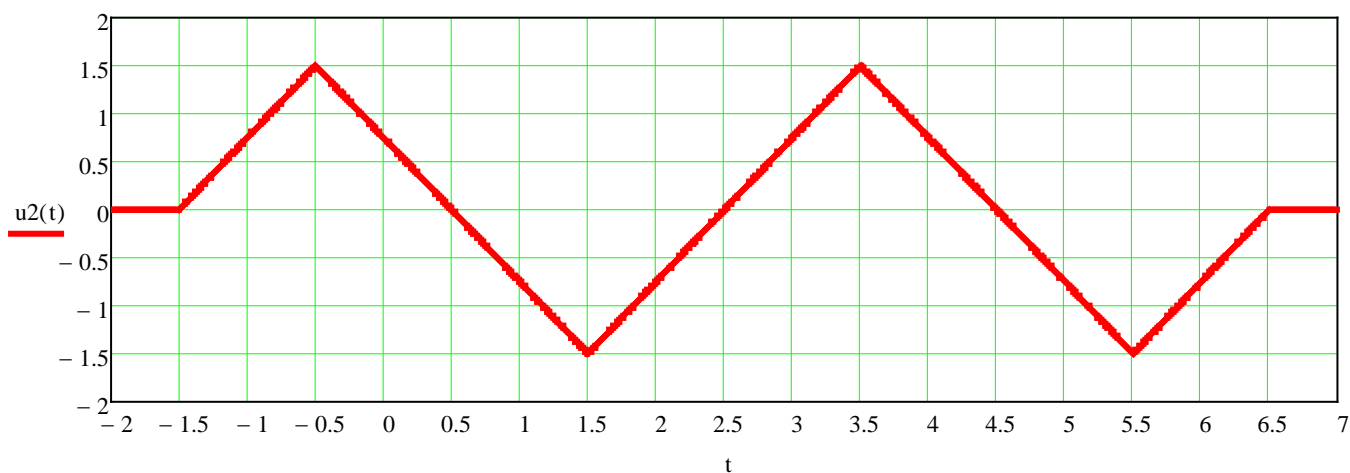
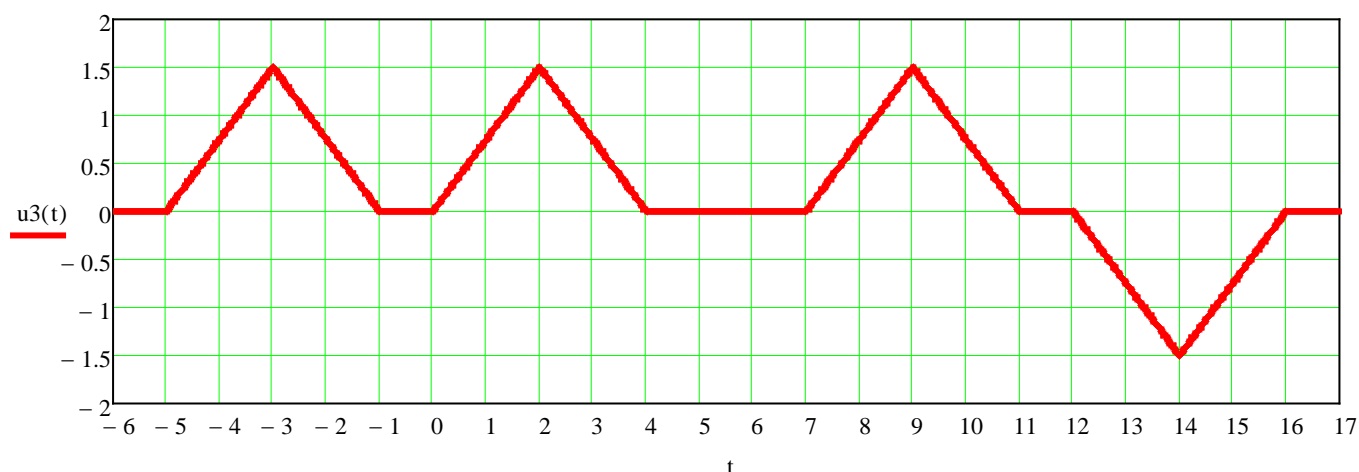


Рис. 3.20 Сигнал $u_2(t)$

Рис. 3.21 Сигнал $u_3(t)$

4. Для всіх сигналів із попередньої задачі знайти значення модуля спектральної густини та значення енергії на нульовій частоті.

5. Якісно побудувати графік спектральної густини для сигналу $u(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ при $\tau = 4$ мкс та $\omega_0 = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

6. Знайти сигнал, у якого спектральна густина дорівнює $S(j \cdot \omega) = 3 \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ при $\omega_0 = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

7. Знайти значення модуля та фази спектральної густини, значення енергії, дійсної та уявної частин на нульовій частоті для сигналу, якій у проміжку від 0 до $2 \cdot \pi$ дорівнює $\text{sign}(\cos(t))$, а на всій іншій часовій осі дорівнює нулю.

8. Графік спектральної густини сигналу $u(t)$ наведений на Рис. 3.22. Знайти математичну модель сигналу $u(t)$ та побудувати графік уявної частини спектральної густини.

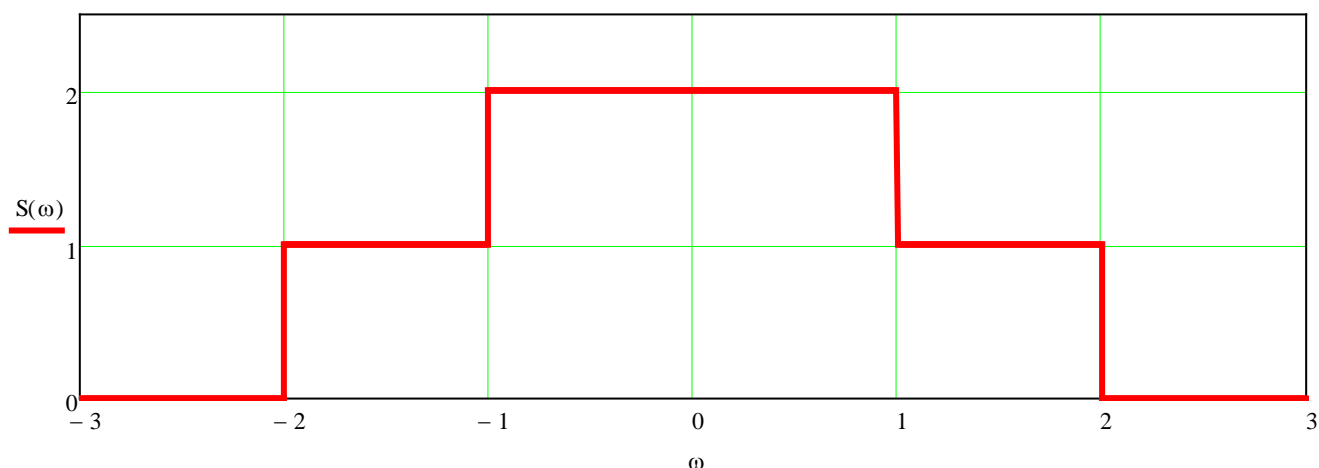


Рис. 3.22 Спектральна густина сигналу $u(t)$

9. Для сигналів з розділу математичні моделі детермінованих сигналів з задачі № 16 знайти для кожного сигналу спектральну густина та побудувати АЧС, ФЧС, енергетичний спектр, дійсну та уявну частину спектральної густини для цього сигналу.

10. Для сигналів з розділу спектральний аналіз періодичних сигналів з задачі № 11 знайти для кожного сигналу, прийнявши його неперіодичним, спектральну густина та побудувати АЧС, ФЧС, енергетичний спектр, дійсну та уявну частину спектральної густини для цього сигналу.

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники и связи: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2010.- 510 с.
2. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: Учебное пособие для вузов.- М: Горячая линия – Телеком, 2012. – 542 с.
3. Бабак В.П. и др.. Сигналы и спектры: Уч. пособие.- К.: Кв НАУ, 2012.-520 с.
4. Куц С.М. та інші. Методичні вказівки до виконання лабораторного практикуму з дисципліни „Сигнали та спектри”. НУТУ КПІ Київ.- 2005.
5. Гумен, М. Б. та ін. Основи теорії процесів в інформаційних системах. У 2 кн. Кн. 1. Аналіз детермінованих процесів. 2017 <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19018>.
6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2000 г.536 с.